

Algebra di Boole

Mr. Boole

George Boole:

- Matematico inglese del XIX secolo
- Algebra che descrive “le leggi del pensiero”
- Logica da cui è possibile verificare inequivocabilmente verità e falsità
- Sembrava pura teoria, ma costruì il supporto teorico per la trattazione dei circuiti elettronici.

2

Variabile booleana

La variabile booleana può assumere solo 2 valori possibili:

- 1 (true, vero)
- 0 (false, falso).

$X \in B$ con $B = \{0, 1\}$

3

Funzione booleana

Sia $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una funzione booleana di n variabili indipendenti

Con n variabili booleane indipendenti ci sono 2^n combinazioni e 2^{2^n} funzioni diverse.

Per $n=1$: 2^{2^1} funzioni diverse = 4 funzioni

- $f_1(x) = 1$
- $f_2(x) = 0$
- $f_3(x) = x$
- $f_4(x) = \overline{x}$

4

Rappresentazioni delle funzioni booleane

Determinati operatori agiscono sulle variabili booleane. Per ogni operatore elementare esiste un circuito elettronico (o *porta logica*) che svolge la funzione logica corrispondente.

5

Operazione AND

A	B	R
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



6

Operazione OR

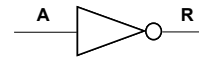
A	B	R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



7

Operazione NOT

A	R
0	1
1	0



8

Operazione EXOR

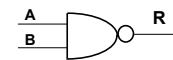
A	B	R
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



9

Operazione NAND

A	B	R
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



10

Operazione NOR

A	B	R
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



11

Operazione EXNOR

A	B	R
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



12

Tabella della verità

Le funzioni booleane possono essere definite tramite *tabelle di verità*, nelle quali si indicano il valore assunto dalla funzione per ogni possibile combinazione delle variabili.

Esempio: $F(x_1, x_2)$ funzione booleana di 2 variabili indipendenti, definita dalla seguente tabella della verità:

x_1	x_2	F
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

13

Costruzione della Tabella della Verità

Per costruire la tabella della verità a partire da una espressione booleana occorre calcolare i termini parziali della funzione riducendoli alle operazioni fondamentali.

Esempio: calcolare la tabella della verità di $F(a,b,c) = a*b+c$

a	b	c	$a*b$	F
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

14

Espressioni booleane

Data una tabella della verità è possibile ricavare l'espressione booleana che specifica una funzione booleana mediante *la regole della somma di prodotti*:

- la funzione è pari alla somma di tutti i termini ad 1 della tabella della verità
- ciascun termine corrisponde al prodotto di tutte le variabili di ingresso che compaiano affermate, se di valore 1, negate se di valore 0.

15

Esempio

Data la seguente tabella della verità:

x_1	x_2	F
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$F(x_1, x_2) = \bar{x}_1 * x_2 + x_1 * x_2$$

16

Esercizi

Determinare le tabelle delle verità delle seguenti funzioni:

- $f1 = a + b$
- $f2 = (ab + b)\bar{c}$
- $f3 = \bar{a}\bar{b}c + bc + ac$

17

Esempio

Verificare tramite tabella della verità la seguente uguaglianza:

- $X = (XY) + (\bar{X}\bar{Y})$

X	Y	XY	$\bar{X}\bar{Y}$	f
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

18

Esercizio

Verificare tramite la tabella della verità le seguenti uguaglianze:

- $X = X(X + \bar{Y}) + Z(\bar{Z} + \bar{Y})$
- $\overline{XY} = \bar{X} + \bar{Y}$
- $\overline{X + Y} = \bar{X} * \bar{Y}$

19

Esercizio

Un allievo si laurea se ha dato tutti gli esami ed ha fatto la tesi oppure ha fatto la sintesi.

20

Soluzione

Esami	Tesi	Sintesi	Laurea
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

21

Soluzione

$$L(E, T, S) = E * \bar{T} * S + E * T * \bar{S} + E * T * S$$

22

Esercizio

I signori A,B,C e D fanno parte di un consiglio di amministrazione.

Sapendo che essi rappresentano le seguenti quote di possesso azionario:

- A = 40%
- B = 25%
- C = 20%
- D = 15%

scrivere la funzione booleana che decide se il consiglio di amministrazione approva la votazione.

23

Circuiti Combinatori

Circuiti logici combinatori

In un circuito logico combinatorio per ogni istante, il valore delle uscite è funzione del valore degli ingressi in quello stesso istante.

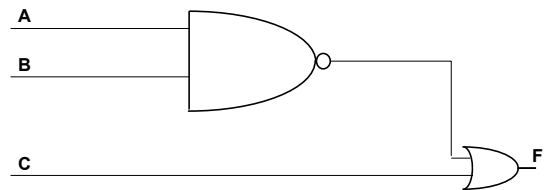
I circuiti combinatori sono *circuiti senza memoria*.

25

Esempio

Disegnare il circuito logico che rappresenta la seguente funzione:

$$F = \overline{AB} + C$$



26

Esercizi

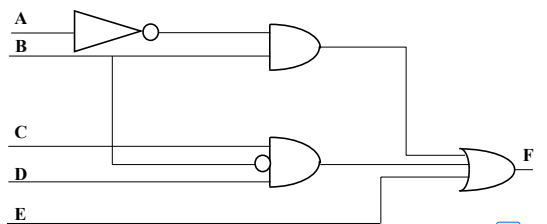
Disegnare i circuiti logici che rappresentano le seguenti funzioni:

- $f1 = (ab + b) * \overline{c}$
- $f2 = \overline{a} * \overline{b} * \overline{c} + bc + ac$

27

Esercizio

Determinare la tavola della verità del circuito seguente:



28

Esercizio

Realizzare un circuito con ingressi X e Y ed uscite D e C la cui tabella della verità sia la seguente:

X	Y	D	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1

29

Esercizio

Disegnare un circuito che riceve in ingresso un numero binario a 2 cifre (X_1, X_0), fornisce in uscita il numero incrementato di una unità espresso sempre su 2 cifre (Y_1, Y_0).

30

Soluzione

X_1	X_0	Y_1	Y_0
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0

$$Y_1 = \overline{X_1} X_0 + X_1 \overline{X_0} = X_1 \text{ exor } X_0$$

$$Y_0 = \overline{X_1} \overline{X_0} + X_1 X_0$$

31

Half Adder

Progettare un circuito con 2 ingressi X_i e Y_i e 2 uscite S_i e C_i che rappresentano rispettivamente la somma ed il carry di X_i+Y_i in binario.



32

Soluzione

X	Y	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

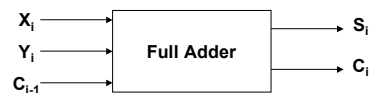
$$S = \overline{X}Y + X\overline{Y} = X \text{ exor } Y$$

$$C = XY$$

33

Full Adder

Progettare un circuito in grado di eseguire una somma tra 2 numeri binari tenendo conto del carry proveniente dal bit di peso meno significativo.



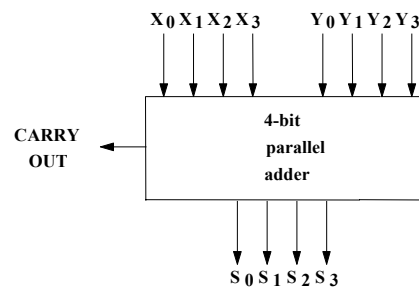
34

Soluzione

X_i	Y_i	C_{i-1}	S_i	C_i
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

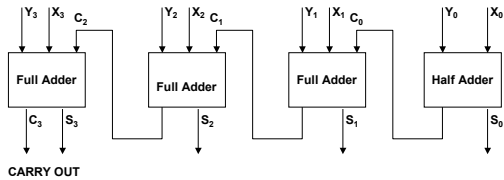
35

Sommatore parallelo a 4 bit



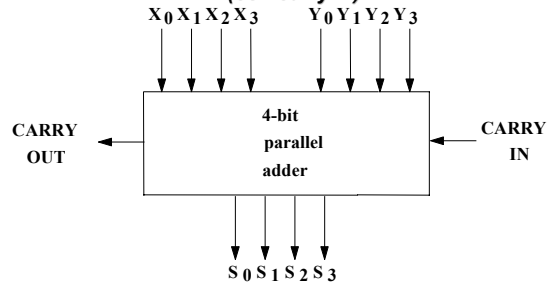
36

Soluzione



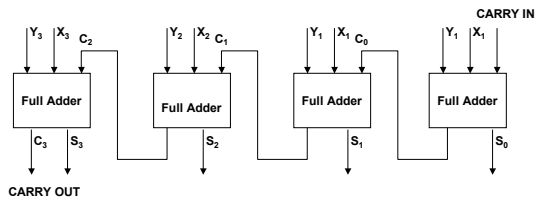
37

Sommatore parallelo a 4 bit (con carry in)



38

Soluzione



39

Esercizio

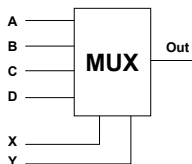
Disegnare un circuito a 3 ingressi X_2, X_1, X_0 ed una uscita f tale che f valga 1 quando il numero codificato dagli ingressi è un multiplo di 3.

40

Circuito Multiplexer

Il circuito multiplexer è quel circuito costituito da un certo numero di ingressi e da un'unica uscita. Il suo scopo è di selezionare un singolo ingresso che viene collegato all'uscita mediante una opportuna configurazione sui segnali di controllo.

Disegnare un circuito multiplexer a 4 ingressi.



41

Soluzione

La tabella della verità relativa ad un Multiplexer a 4 ingressi è la seguente:

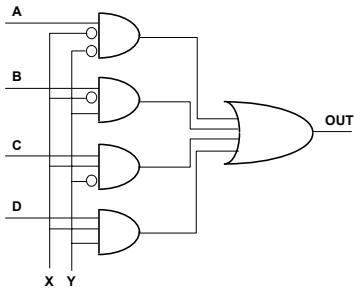
X	Y	OUT
0	0	A
0	1	B
1	0	C
1	1	D

I quattro termini in cui OUT vale 1 sono:

$$OUT = \bar{X}\bar{Y}A + \bar{X}YB + X\bar{Y}C + XYD$$

42

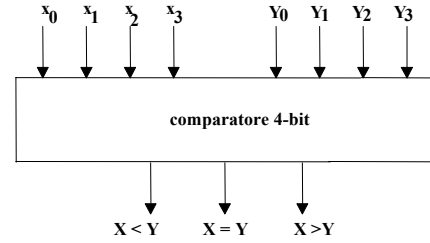
Soluzione
(segue)



43

Comparatore

Circuito che esegue il confronto tra 2 numeri binari su 4 cifre. Una sola uscita vale 1 (le altre valgono 0) a seconda del risultato del confronto.



44