RICHIAMI

I) *DISPOSIZIONI (SEMPLICI) di n elementi presi a k a k (dove* n ≥ k *)*

Sono le k–uple ordinate di elementi contenute in un insieme di n elementi.

Il loro numero è:

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2).......(n-k+1)$$

Caso particolare: se n=k, si parla di *PERMUTAZIONI di n elementi*. Il loro numero è:

$$D_{n,n} = P_n = n(n-1)(n-2).....3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

II) *DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONI di n elementi presi a k a k*

Sono le k–uple ordinate di elementi contenute in un insieme di n elementi, dove gli elementi scelti possono essere ripetuti (anche più volte).

Il loro numero è:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k$$

III) *COMBINAZIONI (SEMPLICI) di n elementi presi a k a k (dove* n ≥ k *)*

Sono i sottoinsiemi di k elementi contenuti in un insieme di n elementi.

Il loro numero è:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...........(n-k+1)}{k!}$$

IV) *COMBINAZIONI CON RIPETIZIONI di n elementi presi a k a k*

Sono le liste (non ordinate) di k elementi contenuti in un insieme di n elementi, dove gli elementi scelti possono essere ripetuti (anche più volte).

Il loro numero è:

$$C_{n,k}^{(r)} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)..........(n+1)n}{k!}$$

ESEMPI

1. Contare le terne ordinate formate con le lettere *A*, B, C, D. (Le ripetizioni sono ammesse)

Si tratta delle disposizioni (poiché conta l'ordine!) con ripetizioni di 4 elementi, presi a tre a tre; sono: $D_{4,3}^{(r)} = 4^3$.

2. Una carta geografica contiene 5 paesi. La si vuole colorare (ogni paese con un colore diverso), avendo a disposizione sette diversi colori. In quanti modi si può fare?

Si hanno sette colori, da usare 5 per volta (uno per ciascun diverso paese) (non sono ammesse ripetizioni dei colori e ovviamente conta l'ordine con cui si usano). Dunque si tratta di disposizioni semplici di sette elementi da prendere a cinque a cinque, cioè sono:
$D_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

3. In quanti modi diversi sette amici possono viaggiare su un'auto che ha solo cinque posti? E se solo uno di essi ha la patente?

Sono le combinazioni (poiché non conta l'ordine con cui gli amici entrano in macchina) di sette elementi da prendere a cinque a cinque; dunque sono:

$$C_{7,5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{7-5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

(si ricordi che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$)

Se uno solo ha la patente, questi *deve* salire in macchina; quindi restano quattro posti e sei amici. Dunque in questo caso, le possibilità sono:

$$C_{6,4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{6-4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

4. Il signor Rossi ha sei amici, A, B, C, D, E, F. Decide di visitarli tutti nei prossimi tre giorni, al ritmo di due al giorno. Quante possibilità ci sono? Se vuole visitare A il primo giorno, a quante si riducono le possibilità?

Il primo giorno il sig. Rossi ha $C_{6,2} = \binom{6}{2} = 15$ possibili scelte.

Il secondo giorno ha solo più $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$ scelte.

Il terzo giorno ne ha solo più una (d'altronde $C_{2,2} = \binom{2}{2} = 1$).

Dunque in tutto ha $15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$ possibilità.
Se A viene visitato il primo giorno allora:
il 1° giorno ha solo 5 scelte
il 2° giorno ha $C_{4,2} = 6$ scelte
il 3° giorno ha solo 1 scelta.
Dunque ha $5 \cdot 6 \cdot 1 = 30$ scelte.

5. Il governo di un piccolo stato ha deciso di introdurre un nuovo criterio per la numerazione delle targhe automobilistiche. Le nuove targhe saranno formate da quattro simboli alfanumerici. Sono allo studio le possibilità:
a) Due lettere (scelte fra le ventisei dell'alfabeto inglese) seguite da due cifre numeriche (scelte fra le usuali cifre della base 10).
b) Una lettera e tre cifre (scelti come sopra): in questo caso la lettera può essere collocata in una posizione qualunque rispetto alle tre cifre.
Con quale dei due criteri si ha a disposizione il maggior numero di targhe?

Esaminiamo le due possibilità:

a) In questo caso le targhe sono stringhe del tipo:

L	L	N	N

dove per L si hanno 26 scelte e per N si hanno 10 scelte; quindi le possibilità sono $26^2 \cdot 10^2$.

b) Si hanno nel secondo caso targhe del tipo:

L	N	N	N

oppure

N	L	N	N

N	N	L	N

N	N	N	L

dove per L ci sono 26 possibilità e per N ci sono 10 possibilità; quindi le possibilità sono $4 \cdot 26 \cdot 10^3$.
Osserviamo che b>a. infatti:
$4 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 > 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$.

Quindi la seconda scelta è quella che offre il maggior numero di targhe.

6. Quanti sono i monomi di 4° grado che si possono formare con le variabili a, b, c?

Sono tutte le quaterne non ordinate contenenti i simboli a, b, c che possono essere ripetuti più volte.
Ad esempio i monomi

$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$

$ab^2c = a \cdot b \cdot b \cdot c\ (= b \cdot a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b \cdot b = \dots \text{etc})$

Si devono considerare pertanto le combinazioni (perché non conta l'ordine) con ripetizioni dei tre elementi a, b, c, presi a 4 a 4. Quindi i possibili monomi sono:

$$C_{3,4}^{(r)} = C_{6,4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$