1 Calcolo di limiti di funzioni razionali

Calcolo di limiti a $\pm\infty$ di funzioni razionali $\left(\text{forma indeterminata}: \frac{\infty}{\infty}\right)$

REGOLA GENERALE

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n\left\{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right\}}{x^m\left\{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}\right\}} = \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}\frac{\left\{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right\}}{\left\{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}\right\}} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \quad \text{caso a.} \\ a_0/b_0 & \text{se } n = m \quad \text{caso b.} \\ \pm\infty & \text{se } n > m \quad \text{caso c.} \end{cases}$$

Nel caso c. il segno è da determinare in base a:

1. $x \to \pm\infty$;
2. $\operatorname{sgn}\left(\frac{a_0}{b_0}\right)$;
3. $n-m$ pari o dispari

ESEMPI

1. caso a.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{90x^7+4x^4+5}{2x^8+3x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7\left\{90+\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x^7}\right\}}{x^8\left\{2+\frac{3}{x^7}+\frac{6}{x^8}\right\}}=0$$

2. caso b.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^7+8x^5+3x}{-4x^7+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^7\left\{1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^6}\right\}}{x^7\left\{-4+\frac{1}{x^6}\right\}}=-\frac{1}{4}$$

3. caso c.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^9+3x+5x^5}{-5x^7+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^9\left\{1+\frac{3}{x^8}+\frac{5}{x^4}\right\}}{x^7\left\{-5+\frac{1}{x^7}\right\}}=-\infty$$

4. caso c.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4+x+1}{2x^2-7x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left\{5+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right\}}{x^2\left\{2-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}\right\}}=+\infty$$

Calcolo di limiti al finito di funzioni razionali $\left(\text{forma indeterminata}: \frac{0}{0} \text{ ove presente}\right)$

REGOLA GENERALE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

$$Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

Fattorizzare i polinomi a numeratore e denominatore e semplificare i termini comuni che si presentano nella forma $(x - x_0)^\alpha$.

ESEMPI

1. $\lim_{x \to a} \frac{x-a}{x^3 - a^3} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)}{(x-a)(x^2 + ax + a^2)} = \lim_{x \to a} \frac{1}{(x^2 + ax + a^2)} = \frac{1}{3a^2}$

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

   Fattorizzando i polinomi a numeratore e a denominatore, ad esempio con la regola di Ruffini, si ottiene:

   $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x-3)(x-4)(x-2)$

   $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2 (x-2)$

   $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-3)(x-4)(x-2)}{(x-1)^2 (x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-1)^2} = 2$

Calcolo di limiti al finito di funzioni razionali (forma indeterminata $\infty - \infty$, studio segno)

REGOLA GENERALE

Svolgere i calcoli riconducendo il limite o ad una forma non indeterminata o ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$;

alternativamente fattorizzare mettendo in evidenza i termini comuni.

ESEMPI

1. $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$

   Si può altresì calcolare il limite con questo metodo:

   $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = -\infty$

2. $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}$

   Utilizzando il secondo procedimento si ottiene:

   $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)} \left(1 - \frac{4}{x+2} \right) = \frac{1}{4}$

2 Calcolo di limiti di funzioni irrazionali

Calcolo di limiti a $\pm\infty$ di funzioni irrazionali

REGOLA GENERALE

Mettere in evidenza, come nel caso 1.1, i termini di grado superiore e, se necessario, rendere razionali le forme irrazionali.

ESEMPI

1. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-\sqrt{x^2-2x+4}}{2\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left\{5-\sqrt{\frac{x^2-2x+4}{x^2}}\right\}}{x\left\{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x}{x^2}}\right\}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}=\frac{5-1}{2}=2$$

2. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-\sqrt{x^2-2x+4}}{2\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left\{5-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-2x+4}\right\}}{x\left\{\frac{2}{x}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x}\sqrt{1-x}\right\}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5+\sqrt{\frac{x^2-2x+4}{x^2}}}{-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}=\frac{5+1}{-2}=-3$$

Tenere presente che per $x\to-\infty$: $\frac{1}{x}\sqrt{f(x)}=-\sqrt{\frac{f(x)}{x^2}}$.

3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+6x-1}-3x = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9x^2+6x-1}-3x\right)\frac{\sqrt{9x^2+6x-1}+3x}{\sqrt{9x^2+6x-1}+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2+6x-1-9x^2}{\sqrt{9x^2+6x-1}+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(6-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{9+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}+3\right)} = \frac{6}{3+3} = 1$

Calcolo di limiti al finito di funzioni irrazionali

REGOLA GENERALE

Rendere razionali le forme indeterminate irrazionali

ESEMPI

1. $\lim_{x\to5} \frac{x-\sqrt{x^2+x-5}}{1-\sqrt{x-4}} = \lim_{x\to5} \frac{x-\sqrt{x^2+x-5}}{1-\sqrt{x-4}} \cdot \frac{1+\sqrt{x-4}}{1+\sqrt{x-4}} = \lim_{x\to5} \frac{x-\sqrt{x^2+x-5}}{5-x} \cdot \lim_{x\to5}\left(1+\sqrt{x-4}\right) = 2\cdot\lim_{x\to5} \frac{x-\sqrt{x^2+x-5}}{5-x} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+x-5}}{x+\sqrt{x^2+x-5}} =$

$= 2\cdot\lim_{x\to5} \frac{x^2-\left(x^2+x-5\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x-5}\right)(5-x)} = 2\cdot\lim_{x\to5} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x-5}} = 2\,\frac{1}{10} = \frac{1}{5}$

Tabella di limiti fondamentali

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}=0 \qquad \alpha>0$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}=0 \qquad \alpha>0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\mathrm{e}^a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a \mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{a^x}{x^b}=+\infty \qquad a>1,\ \mathrm{b}>0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log_b x}{x^\alpha}=0 \qquad \alpha>0,\ \mathrm{b}>0$$

3 Calcolo di limiti di funzioni trigonometriche

REGOLA GENERALE

Applicare le formule trigonometriche e/o sfruttare i limiti fondamentali elencati in tabella.

ESEMPI

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

   Effettuando la sostituzione $t = x - \dfrac{\pi}{2}$ si ottiene

   $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{t \to 0} \frac{-\sin t}{t} = -1$$

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x \dfrac{\sin 3x}{3x}}{5x \dfrac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t}}{\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin u}{u}} = \frac{3}{5}$$

   $t = 3x, u = 5x$

3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$

   La differenza a numeratore può essere trasformata in un prodotto utilizzando la seguente formula di prostaferesi:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

4. $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a} = \lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\lim_{x\to a}\frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a} = \cos a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \cos a$$

$$t = \frac{x-a}{2}$$

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\cdot 9 = 9\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{9}{2}$$

6. $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 3x}{x} = \lim_{t\to 0}3\frac{\operatorname{arctg} t}{t} = \lim_{y\to 0}\frac{3y}{\operatorname{tg}(y)} = 3$$

$t = 3x,\ y = \operatorname{arctg} t$

7. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x - \cos x}{\sin 4x}$$

si ponga $x - \frac{\pi}{4} = t$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x - \cos x}{\sin 4x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left[4\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right]} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t}{\sin(4t+\pi)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin t}{-(\sin 4t)} = -\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin t}{\sin 4t}\cdot\frac{4t}{4t} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

4 Calcolo di limiti di funzioni esponenziali e logaritmiche

REGOLA GENERALE

Applicare le proprietà di esponenziali e logaritmi e/o sfruttare i limiti fondamentali elencati in tabella.

ESEMPI

1. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^{-x}}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^{-x}}{e^{2x}-2e^{x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\left(1-e^{-3x}\right)}{e^{2x}\left(1-2e^{-x}+e^{-2x}\right)}=1$$

2. $$\lim_{x\to0^{+}}\frac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{\sqrt{x}}=\lim_{t\to0^{+}}\frac{e^{t}-1}{t^{3/2}}=\lim_{t\to0^{+}}\frac{e^{t}-1}{t}\frac{1}{t^{1/2}}=\lim_{t\to0^{+}}t^{-1/2}=+\infty$$
   $t=\sqrt[3]{x}$

3. $$\lim_{x\to3}\frac{\log_{a}\frac{x}{3}}{x-3}=\lim_{t\to1}\frac{\log_{a}t}{3(t-1)}=\frac{1}{3}\log_{a}e\qquad(a>0)$$
   $t=\dfrac{x}{3}$

4. $$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

5. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\log_{2}\left(1+e^{x}\right)}{e^{x}}=\lim_{t\to0^{+}}\frac{\log_{2}(1+t)}{t}=\log_{2}e$$
   $t=e^{x}$

6. $$\lim_{x\to+\infty}x\left[\log(1+x)-\log x\right]=\lim_{x\to+\infty}x\log\frac{1+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0^{+}}\frac{\log(1+t)}{t}=1$$
   $t=\dfrac{1}{x}$