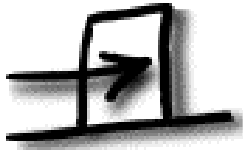




1 Calcolo di limiti di funzioni razionali



Calcolo di limiti a $\pm\infty$ di funzioni razionali (forma indeterminata: $\frac{\infty}{\infty}$)

REGOLA GENERALE



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$$



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^n \left\{ a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right\}}{x^m \left\{ b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m} \right\}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m} \frac{\left\{ a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right\}}{\left\{ b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m} \right\}} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m & \text{caso a.} \\ a_0/b_0 & \text{se } n = m & \text{caso b.} \\ \pm\infty & \text{se } n > m & \text{caso c.} \end{cases}$$

Nel caso c. il segno è da determinare in base a:

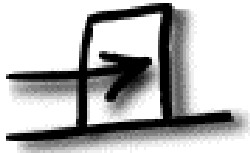


1. $x \rightarrow \pm\infty$;
2. $\text{sgn}\left(\frac{a_0}{b_0}\right)$;
3. $n - m$ pari o dispari





ESEMPI



1. caso a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{90x^7 + 4x^4 + 5}{2x^8 + 3x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 \left\{ 90 + \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^7} \right\}}{x^8 \left\{ 2 + \frac{3}{x^7} + \frac{6}{x^8} \right\}} = 0$$



2. caso b.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 + 8x^5 + 3x}{-4x^7 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 \left\{ 1 + \frac{8}{x^2} + \frac{3}{x^6} \right\}}{x^7 \left\{ -4 + \frac{1}{x^6} \right\}} = -\frac{1}{4}$$



3. caso c.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^9 + 3x + 5x^5}{-5x^7 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^9 \left\{ 1 + \frac{3}{x^8} + \frac{5}{x^4} \right\}}{x^7 \left\{ -5 + \frac{1}{x^7} \right\}} = -\infty$$



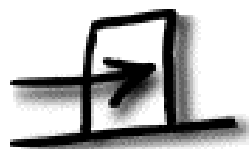
4. caso c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + x + 1}{2x^2 - 7x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left\{ 5 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right\}}{x^2 \left\{ 2 - \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2} \right\}} = +\infty$$





Calcolo di limiti al finito di funzioni razionali (forma indeterminata : $\frac{0}{0}$ ove presente)



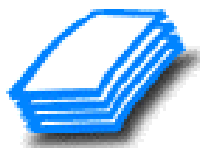
REGOLA GENERALE

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$$

Fattorizzare i polinomi a numeratore e denominatore e semplificare i termini comuni che si presentano nella forma $(x - x_0)^\alpha$.



ESEMPI

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)}{(x - a)(x^2 + ax + a^2)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x^2 + ax + a^2)} = \frac{1}{3a^2}$$



$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

Fattorizzando i polinomi a numeratore e a denominatore, ad esempio con la regola di Ruffini, si ottiene:

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 3)(x - 4)(x - 2)$$

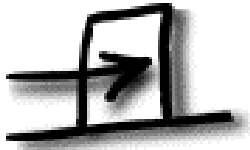
$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 3)(x - 4)(x - 2)}{(x - 1)^2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 3)(x - 4)}{(x - 1)^2} = 2$$





Calcolo di limiti al finito di funzioni razionali (forma indeterminata $\infty - \infty$, studio segno)

**REGOLA GENERALE**

Svolgere i calcoli riconducendo il limite o ad una forma non indeterminata o ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$; alternativamente fattorizzare mettendo in evidenza i termini comuni.

**ESEMPI**

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$$

Si può altresì calcolare il limite con questo metodo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

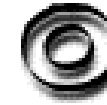


$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}$$

Utilizzando il secondo procedimento si ottiene:

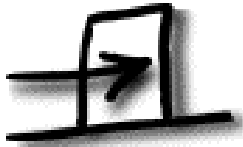
$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)} \left(1 - \frac{4}{x+2} \right) = \frac{1}{4}$$





2 Calcolo di limiti di funzioni irrazionali

Calcolo di limiti a $\pm \infty$ di funzioni irrazionali



REGOLA GENERALE

Mettere in evidenza, come nel caso 1.1, i termini di grado superiore e, se necessario, rendere razionali le forme irrazionali.



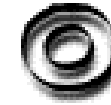
ESEMPI

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - \sqrt{x^2 - 2x + 4}}{2\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left\{ 5 - \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x} \right\}}{x \left\{ 2\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x}{x^2}} \right\}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}}{2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

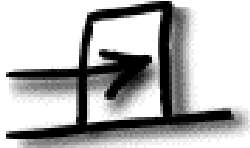
$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - \sqrt{x^2 - 2x + 4}}{2\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left\{ 5 - \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 2x + 4} \right\}}{x \left\{ \frac{2}{x} \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x} \sqrt{1 - x} \right\}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 + \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x}}{-2\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}}{-2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}} = \frac{5 + 1}{-2} = -3$$

Tenere presente che per $x \rightarrow -\infty$: $\frac{1}{x} \sqrt{f(x)} = -\sqrt{\frac{f(x)}{x^2}}$.





$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 6x - 1} - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 6x - 1} - 3x) \frac{\sqrt{9x^2 + 6x - 1} + 3x}{\sqrt{9x^2 + 6x - 1} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 6x - 1 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 6x - 1} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(6 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{9 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}} + 3\right)} = \frac{6}{3+3} = 1$$



Calcolo di limiti al finito di funzioni irrazionali



REGOLA GENERALE

Rendere razionali le forme indeterminate irrazionali



ESEMPI

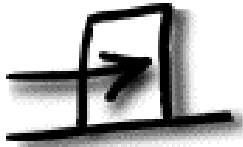
$$1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - \sqrt{x^2 + x - 5}}{1 - \sqrt{x - 4}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - \sqrt{x^2 + x - 5}}{1 - \sqrt{x - 4}} \cdot \frac{1 + \sqrt{x - 4}}{1 + \sqrt{x - 4}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - \sqrt{x^2 + x - 5}}{5 - x} \cdot \lim_{x \rightarrow 5} (1 + \sqrt{x - 4}) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - \sqrt{x^2 + x - 5}}{5 - x} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + x - 5}}{x + \sqrt{x^2 + x - 5}} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - (x^2 + x - 5)}{(x + \sqrt{x^2 + x - 5})(5 - x)} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x - 5}} = 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$





Tabella di limiti fondamentali



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$$



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

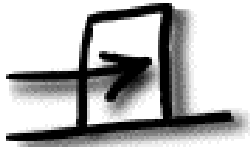


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty \quad a > 1, b > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0, b > 0$$



3 Calcolo di limiti di funzioni trigonometriche



REGOLA GENERALE

Applicare le formule trigonometriche e/o sfruttare i limiti fondamentali elencati in tabella.



ESEMPI

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

Effettuando la sostituzione $t = x - \frac{\pi}{2}$ si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} = -1$$



$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \frac{\sin 3x}{3x}}{5x \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u}} = \frac{3}{5}$$

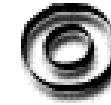
$$t = 3x, u = 5x$$



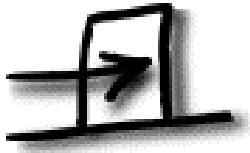
$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

La differenza a numeratore può essere trasformata in un prodotto utilizzando la seguente formula di prostaferesi:





$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$



$$4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \left(\frac{x - a}{2} \right) \cos \left(\frac{x + a}{2} \right)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \cos \left(\frac{x + a}{2} \right) \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \left(\frac{x - a}{2} \right)}{x - a} = \cos a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \cos a$$



$$t = \frac{x - a}{2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{(3x)^2} \cdot 9 = 9 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{9}{2}$$



$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} 3 \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3y}{\operatorname{tg}(y)} = 3$$

$$t = 3x, y = \operatorname{arctg} t$$



$$7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin 4x}$$

$$\text{si ponga } x - \frac{\pi}{4} = t :$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin 4x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left[4 \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \right]} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t}{\sin(4t + \pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin t}{-(\sin 4t)} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin t}{\sin 4t} \cdot \frac{4t}{4t} = - \frac{\sqrt{2}}{4}$$





4 Calcolo di limiti di funzioni esponenziali e logaritmiche

REGOLA GENERALE

Applicare le proprietà di esponenziali e logaritmi e/o sfruttare i limiti fondamentali elencati in tabella.

ESEMPI

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{e^{2x} - 2e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}(1 - e^{-3x})}{e^{2x}(1 - 2e^{-x} + e^{-2x})} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t^{3/2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} \frac{1}{t^{1/2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1/2} = +\infty$$

$$t = \sqrt[3]{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_a \frac{x}{3}}{x - 3} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\log_a t}{3(t - 1)} = \frac{1}{3} \log_a e \quad (a > 0)$$

$$t = \frac{x}{3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x \frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log_2(1 + e^x)}{e^x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log_2(1 + t)}{t} = \log_2 e$$

$$t = e^x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\log(1 + x) - \log x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{1 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + t)}{t} = 1$$

$$t = \frac{1}{x}$$

