

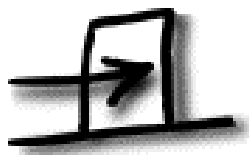


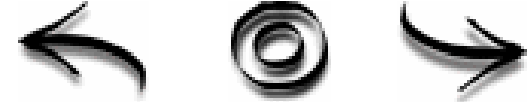
1 Calcolo della derivata prima

RICHIAMI

Le derivate fondamentali sono elencate nella tabella seguente

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	arccotg x	$-\frac{1}{1+x^2}$
sin x	cos x	log x	$\frac{1}{x}$
cos x	- sin x	$\log_a x$	$\frac{\log_a e}{x}$
tg x	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	sinh x	cosh x
cotg x	$-1 - \operatorname{cotg}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$	cosh x	sinh x
arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		





Valgono le regole elencate nella tabella seguente

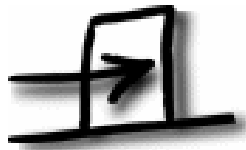
$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

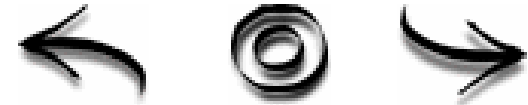
2 Limiti con la regola di de L'Hopital

Calcolo di limiti con la regola di de L'Hopital (forma indeterminata: $\frac{\infty}{\infty}$)

REGOLA GENERALE

Applicare una o più volte la regola di de L'Hopital ove ne siano verificate le condizioni.





ESEMPI

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cotg x}{\log x}$

SOLUZIONE

Verifica forma indeterminata: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cotg x}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} = -\infty$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(e^x - 1)}{\log x}$

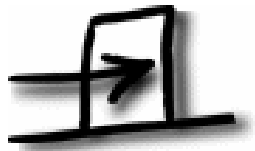
SOLUZIONE

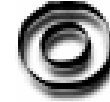
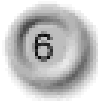
Verifica forma indeterminata: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(e^x - 1) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(e^x - 1)}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^x}{e^x - 1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x e^x}{e^x - 1}$$

Il limite presenta ancora una forma indeterminata ma del tipo $\frac{0}{0}$; essendo verificate le ipotesi del teorema di De

L'Hospital, si può calcolare il limite applicando la regola (vedi a.) oppure si può calcolare come illustrato nel paragrafo 4 dei Limiti (vedi b.).





$$a. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + x e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x) = 1$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \cdot 1 = 1$$

3. Quest'esempio dimostra come, in alcune occasioni, l'applicazione della regola di de L'Hopital porti il limite in una forma più complessa di quella di partenza oppure non sia in grado di risolvere l'indeterminazione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

SOLUZIONE

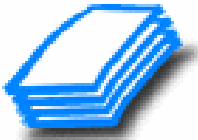
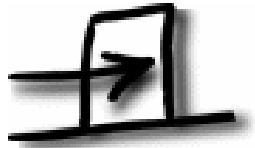
Verifica forma indeterminata: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$.

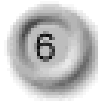
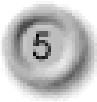
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Si può riapplicare la regola di de L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

L'applicazione successiva della regola ha riportato il limite nella forma originaria: ulteriori iterazioni di tale procedimento non permetterebbero di risolvere l'indeterminazione; per il calcolo di questo limite utilizzare la tecnica illustrata nel paragrafo 2.1 dei Limiti.





Calcolo di limiti con la regola di de L'Hopital (forma indeterminata: $\frac{0}{0}$)

REGOLA GENERALE

Applicare una o più volte la regola di de L'Hopital ove ne siano verificate le condizioni.

ESEMPI

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

SOLUZIONE

Verifica forma indeterminata: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

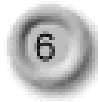
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$

SOLUZIONE

Verifica forma indeterminata: $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cos x - \sin x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} \right)$$



Il limite presenta ancora una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$; essendone verificate le condizioni, si può applicare la

regola di de L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} \right) = \frac{0}{2} = 0$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$

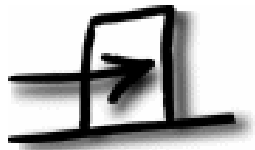
SOLUZIONE

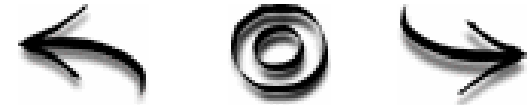
Verifica forma indeterminata: $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - \operatorname{tg} x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{3x^2 \cos^2 x}$$

A questo punto conviene isolare quei fattori che hanno per $x \rightarrow 0$ limite finito e non nullo e riapplicare quindi la regola sugli altri fattori.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{3x^2 \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3 \cos^2 x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{x^2} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{x^2} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \cos^2 x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$





Calcolo di limiti con la regola di de L'Hopital (forma indeterminata : $0 \cdot \infty$)

REGOLA GENERALE

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) \qquad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

Attraverso una delle seguenti identità riportare il limite in una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ rispettivamente:

a. $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

b. $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

applicare quindi, ove possibile, la regola di de L'Hopital.

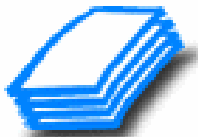
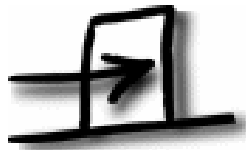
ESEMPI

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

SOLUZIONE

Verifica forma indeterminata: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \qquad \text{avendo sfruttato l'identità b.}$$





Il limite si presenta ora nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e può essere calcolato con la regola di de L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{x+2}{x-1}$

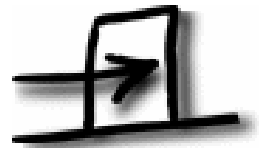
SOLUZIONE

Verifica forma indeterminata: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{x+2}{x-1} = \log \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \right] = \log 1 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \frac{x+2}{x-1}}{\frac{1}{x}}$$

avendo sfruttato l'identità a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \frac{x+2}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x-1}{x+2} \frac{-3}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{(x+2)(x-1)} = 3$$





3 Polinomi di Taylor

RICHIAMI

Ricordiamo la definizione di polinomio di Taylor della funzione $f(x)$ centrato in x_0 di ordine n :

$$T_{f,x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k .$$

Talvolta, quando $x_0 = 0$, si parla di polinomio di McLaurin.

Se si pone

$$r_n(x) = f(x) - T_{f,x_0,n}(x)$$

si ha la stima

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0 ,$$

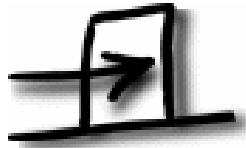
ossia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 .$$

Nella tabella seguente sono indicati gli sviluppi, e di conseguenza i polinomi, di alcune funzioni comunemente usate centrati in $x_0 = 0$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$





$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

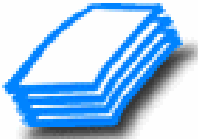
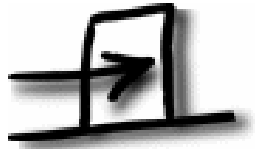
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$$

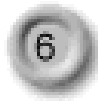
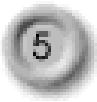
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \dots + (n+1)x^n + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \quad \alpha \in \mathbf{R}$$





ESEMPI

1. Calcolare il polinomio di Taylor della funzione $f(x) = e^x$ centrato in $x_0 = -1$ di ordine n .

SOLUZIONE

Dalla definizione di polinomio di Taylor si ha:

$$T_{f(x), x_0, n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{con } f(x) \text{ derivabile } n \text{ volte in } x_0.$$

Nel nostro caso $f^k(x) = e^x, \forall k$, e dunque $f^k(-1) = e^{-1}$. Pertanto:

$$T_{e^x, -1, n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1}}{k!} (x+1)^k = \frac{1}{e} + \frac{x+1}{e} + \frac{(x+1)^2}{2e} + \dots + \frac{(x+1)^n}{e(n!)}$$

2. Data la funzione

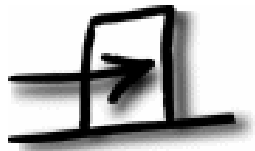
$$f(x) = e^{3x} - \arctan(3x) - 1$$

- a. determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato all'ordine $n=3$;
- b. stabilire di che natura è il punto $x_0 = 0$.

SOLUZIONE

- a. Ricordiamo che lo sviluppo di MacLaurin di ordine n di una funzione $f(x)$ è dato da:

$$(\clubsuit) \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + o(x^n)$$





Per calcolare lo sviluppo di McLaurin della funzione assegnata, possiamo quindi procedere calcolando le derivate successive di $f(x)$ e calcolandone i valori in corrispondenza di $x = 0$. Si ha:

$$f'(x) = 3e^{3x} - \frac{3}{9x^2 + 1};$$

$$f''(x) = 9e^{3x} + 3 \frac{18x}{(9x^2 + 1)^2};$$

$$f'''(x) = 27e^{3x} + 54 \frac{(9x^2 + 1)^2 - x \cdot 2(9x^2 + 1) \cdot 18x}{(9x^2 + 1)^4};$$

Calcolando il valore delle funzioni in corrispondenza di $x = 0$ si ha:

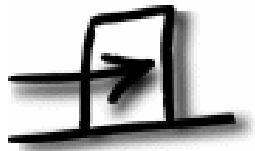
$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 9, \quad f'''(0) = 81.$$

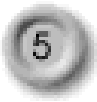
Ne segue che lo sviluppo di McLaurin di ordine 3 della funzione assegnata è:

$$f(x) = 0 + 0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot 81 \cdot x^3 + o(x^3) = \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{2}x^3 + o(x^3).$$

Un modo molto più rapido di procedere (e vivamente consigliato) consiste invece nello sfruttare, quando possibile, gli sviluppi di McLaurin noti usando la tecnica della sostituzione. Ricordando che lo sviluppo di McLaurin di ordine 3 della funzione e^y è il seguente:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3),$$





tramite la sostituzione $y = 3x$ si ha:

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + o((3x)^3) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3).$$

Lo sviluppo di McLaurin di ordine 3 della funzione arcotangente è invece:

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3),$$

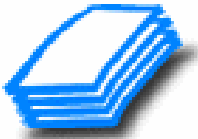
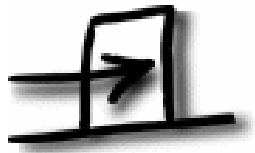
Si osservi che, essendo l'arcotangente una funzione dispari, il suo polinomio di McLaurin di qualsiasi ordine non contiene termini di ordine pari (i coefficienti corrispondenti ai termini di ordine pari sono tutti nulli). Quello sopra riportato è quindi, più precisamente, lo sviluppo di ordine 4, poiché sappiamo che il termine successivo dello sviluppo avrebbe la forma $0 \cdot t^4$.

Pertanto possiamo scrivere, in modo più preciso,

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4).$$

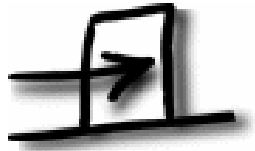
Con la sostituzione $t = 3x$ si ottiene quindi:

$$\arctan(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{3} + o((3x)^4) = 3x - 9x^3 + o(x^4).$$





Quindi complessivamente si ottiene:



$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)\right) - (3x - 9x^3 + o(x^4)) - 1 \\ &= 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) - 3x + 9x^3 + o(x^4) - 1 \\ &= \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$



b. Al punto precedente abbiamo già calcolato le derivate successive di $f(x)$ fino a quella di ordine tre. Si ha:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 9, \quad f'''(0) = 81.$$

Possiamo quindi concludere che per $f(x)$ il punto $x_0 = 0$ è innanzitutto uno zero ($f(0) = 0$), inoltre è un punto stazionario ($f'(0) = 0$), per la precisione un punto di minimo, in quanto la prima derivata che non si annulla è quella di ordine due (pari) ed è positiva ($f''(0) = 9$).



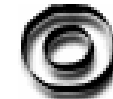
3. Calcolare il polinomio di McLaurin della funzione $f(x) = \ln(1 - x^2)$ di ordine 6.

SOLUZIONE

Dalla tabella degli sviluppi di Taylor si ricava che:

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad t \rightarrow 0$$





Ponendo $t = -x^2$ e sostituendo si ottiene:

$$\log(1-x^2) = -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{3} + o(x^6) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + o(x^6)$$

e quindi

$$T_{\ln(1-x^2),0,6}(x) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3}$$

4. Data la funzione

$$f(x) = e^{2x} - 1 - \log(1+2x) - 4x^2$$

- determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato all'ordine $n=3$;
- sfruttando tale risultato, stabilire di che natura è il punto $x_0 = 0$;
- sempre sfruttando lo sviluppo di McLaurin ottenuto precedentemente, calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}.$$

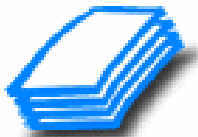
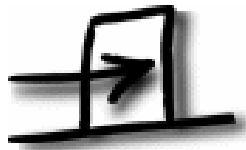
SOLUZIONE

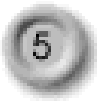
a. Si ha

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3),$$

e tramite la sostituzione $y = 2x$,

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o((2x)^3) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$





Si ha inoltre

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3),$$

tramite la sostituzione $t=2x$ si ottiene quindi:

$$\log(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o((2x)^3) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3).$$

Quindi si ottiene:

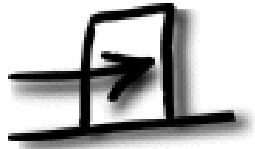
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) - 1 - \left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right) - 4x^2 \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) - 1 - 2x + 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) - 4x^2 \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

- b. Ricordando la (♣) di pagina 11, possiamo osservare che se è già noto lo sviluppo di MacLaurin di una certa funzione fino ad un certo ordine n , possiamo ricavare, senza effettuare nessuna operazione di derivazione, il valore della funzione $f(x)$ e delle sue derivate fino all'ordine n calcolate nel punto $x_0 = 0$.

Infatti, supponiamo di sapere che un certo polinomio

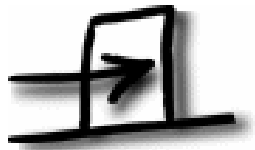
$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

rappresenta il polinomio di MacLaurin della funzione $f(x)$ arrestato all'ordine n .





Confrontandolo con (♣) si ricava che



$$\begin{aligned}
 f(0) &= a_0 \\
 f'(0) &= a_1 \\
 f''(0) &= 2!a_2 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 f^{(n)}(0) &= n! \cdot a_n
 \end{aligned}$$



Nel nostro caso, quindi, osservando semplicemente lo sviluppo ottenuto, ovvero

$$f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$



possiamo immediatamente concludere che

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -8$$

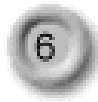
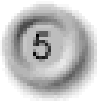
Di conseguenza per $f(x)$ il punto $x_0 = 0$ è uno zero ($f(0) = 0$), un punto stazionario ($f'(0) = 0$); poiché la prima derivata che non si annulla è quella di ordine tre (dispari) si tratta di un flesso orizzontale (per la precisione si tratta di un flesso discendente in quanto è negativa, $f'''(0) = -8 < 0$).



c. Il limite richiesto è una forma indeterminata del tipo $0/0$. Sfruttando il polinomio di MacLaurin di $f(x)$ già calcolato abbiamo però:



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{4}{3}x^3}{x^3} = -\frac{4}{3}$$



5. Data la funzione

$$f(x) = -\sqrt{1+3x^2} + \cos(5x),$$

- a. determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato all'ordine $n = 2$;
- b. sfruttando tale risultato, determinare la natura del punto $x_0 = 0$;
- c. sempre sfruttando lo sviluppo di McLaurin ottenuto, calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{7x^2}$$

SOLUZIONE

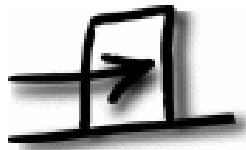
a. Ricordando che :

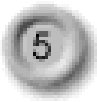
$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y), \tag{1}$$

tramite la sostituzione $y = 3x^2$ si ha:

$$\sqrt{1+3x^2} = 1 + \frac{3x^2}{2} + o(3x^2) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

Si osservi come sia stato sufficiente considerare lo sviluppo di McLaurin di ordine 1 per la funzione $\sqrt{1+y}$ per ottenere, tramite la sostituzione $y = 3x^2$, lo sviluppo di McLaurin di ordine 2 per la funzione $\sqrt{1+3x^2}$.





Se in (1) avessimo considerato lo sviluppo fino all'ordine 2

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2),$$

avremmo ottenuto, con la sostituzione,

$$\sqrt{1+3x^2} = 1 + \frac{3x^2}{2} - \frac{(3x^2)^2}{8} + o((3x^2)^2) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{8}x^4 + o(x^4).$$

ovvero lo sviluppo di McLaurin di ordine 4 per $\sqrt{1+3x^2}$; avremmo quindi un numero di termini superiori a quelli richiesti che poi andrebbero comunque tolti.

Passando al coseno, ricordando che:

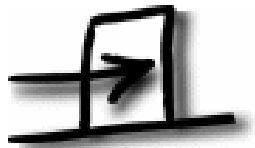
$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + o(t^3),$$

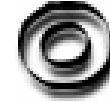
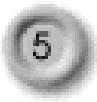
si ha, tramite la sostituzione $t = 5x$,

$$\cos(5x) = 1 - \frac{1}{2}(5x^2) + o((5x)^3) = 1 - \frac{25}{2}x^2 + o(x^3).$$

Quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right) + \left(1 - \frac{25}{2}x^2 + o(x^3)\right) \\ &= -1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) + 1 - \frac{25}{2}x^2 + o(x^3) \\ &= -14x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$





b. Osservando lo sviluppo di McLaurin si può concludere che si ha

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -28.$$

Come conseguenza di questa osservazione possiamo sicuramente concludere che per $f(x)$ il punto $x_0 = 0$ è innanzitutto uno zero ($f(0) = 0$), inoltre è un punto stazionario ($f'(0) = 0$), per la precisione un punto di massimo, in quanto la prima derivata che non si annulla è quella di ordine due (pari) ed è negativa ($f''(0) = -28$).

c. Il limite richiesto è una forma indeterminata del tipo $0/0$. Sfruttando lo sviluppo di McLaurin di $f(x)$ otteniamo però

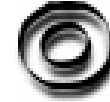
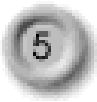
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{7x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-14x^2 + o(x^2)}{7x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-14x^2}{7x^2} = -2$$

6. Data la funzione

$$f(x) = 3x^2 \cos(2x^3) - x^2 e^{-2x} - 2x^2,$$

- determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato all'ordine $n=3$;
- sfruttando tale risultato, stabilire di che natura è il punto $x_0 = 0$;
- sempre sfruttando lo sviluppo di McLaurin ottenuto precedentemente, nonché l'analogo risultato ottenuto in un esempio precedente, calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cos(2x^3) - x^2 e^{-2x} - 2x^2}{e^{3x} - \arctan(3x) - 1}.$$



SOLUZIONE

a. Poiché si ha

$$\cos t = 1 + o(t),$$

tramite la sostituzione $t = 2x^3$ si ottiene

$$3x^2 \cos(2x^3) = 3x^2(1 + o(2x^3)) = 3x^2 + o(x^5).$$

Inoltre, ricordando che

$$e^y = 1 + y + o(y),$$

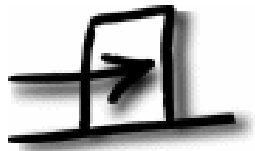
si ha, tramite la sostituzione $y = -2x$,

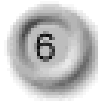
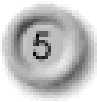
$$x^2 e^{-2x} = x^2(1 - 2x + o(-2x)) = x^2 - 2x^3 + o(x^3).$$

Quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x^2 + o(x^5)) - (x^2 - 2x^3 + o(x^3)) - 2x^2 \\ &= 3x^2 + o(x^5) - x^2 + 2x^3 + o(x^3) - 2x^2 \\ &= 2x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Anche in questo caso è stato sufficiente considerare lo sviluppo di McLaurin arrestato all'ordine 1 sia per la funzione coseno che per l'esponenziale: nel caso del coseno, già la sostituzione $t = 2x^3$ conduce allo sviluppo di McLaurin di ordine 3 di $\cos(2x^3)$ e la successiva moltiplicazione per il fattore x^2 conduce addirittura allo sviluppo di ordine 5; nel caso dell'esponenziale, la moltiplicazione di e^{-2x} per il fattore x^2 conduce allo sviluppo di ordine 3 per $x^2 e^{-2x}$.





b. Si può concludere che:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 12$$

Di conseguenza per $f(x)$ il punto $x_0 = 0$ è uno zero ($f(0) = 0$) e un punto stazionario ($f'(0) = 0$); poiché la prima derivata che non si annulla è quella di ordine 3 (dispari) si tratta di un flesso orizzontale; per maggiore precisione, poiché $f'''(0) = 12 > 0$, possiamo aggiungere che si tratta di un flesso orizzontale ascendente.

c. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $0/0$. Sfruttando però i polinomi di McLaurin ottenuti qui e in uno degli esempi precedenti si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cos(2x^3) - x^2 e^{-2x} - 2x^2}{e^{3x} - \arctan(3x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + o(x^3)}{\frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{2}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{\frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{2}x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^2 \left(\frac{9}{2} + \frac{27}{2}x \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{9}{2} + \frac{27}{2}x} = 0.$$

7. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{-x^3}}$

SOLUZIONE

Il limite si presenta nella forma indefinita $\frac{0}{0}$ e può essere calcolato con la regola di De L'Hospital; è altresì possibile

calcolare il limite utilizzando gli sviluppi di Taylor delle funzioni presenti.



In particolare il grado al quale arrestare gli sviluppi di Taylor deve essere tale da poter evidenziare la parte principale della funzione in esame per $x \rightarrow x_0$; purtroppo non è sempre facile individuarlo subito. In questo caso proviamo a troncare gli sviluppi al grado 3:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad x \rightarrow 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \quad x \rightarrow 0$$

Ponendo $t = x^2$ e $z = x^3$ si ottiene:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3) = 1 + x^2 + o(x^3) = e^{x^2} \quad x \rightarrow 0$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + o(z^3) = 1 + x^3 + o(x^3) = e^{x^3} \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3)}{1 + x^2 - (1 + x^3) + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^2 - x^3 + o(x^3)} = 1$$

Si può ora affermare che gli sviluppi al grado 3 sono sufficienti; in realtà sarebbero anche bastati quelli al grado 2.

